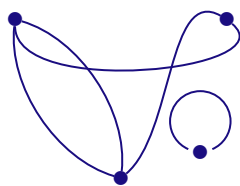


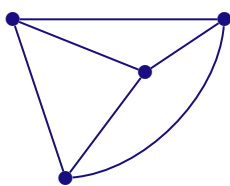
Chapitre n° 6 : Graphes

1 Quelques définitions

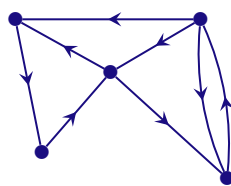
De manière générale, un graphe est un ensemble de sommets et d'arêtes (ou arcs) reliant ces sommets. Il existe différents types de graphes, orientés ou non, ou autorisant plusieurs arcs entre deux sommets.



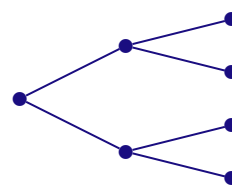
Graphe G_1



Graphe G_2



Graphe G_3



Graphe G_4

Définition 1: Graphe non orienté, sommets, arêtes

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est déterminé par la donnée de deux ensembles :

- un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés *sommets*
- un ensemble A de paires de sommets appelées *arêtes*.

Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un graphe G , une arête a de l'ensemble A s'écrit $a = \{x_i, x_j\}$ où x_i et x_j sont les *extrémités* de a .

Les sommets x_i et x_j sont alors dits *adjacents* dans le graphe G et on dit qu'ils sont *incidents* avec l'arête a .

Lorsque les deux extrémités sont confondues ($x_i = x_j$) l'arête s'appelle une *boucle*.

Deux arêtes sont dites parallèles lorsqu'elles ont mêmes extrémités.

Définition 2: ordre d'un graphe

On appelle ordre d'un graphe le nombre de sommets de ce graphe.

Exemple 1: les graphes G_1 et G_2 sont d'ordre 4; le graphe G_3 est d'ordre 5 et le graphe G_4 est d'ordre 7.

Définition 3: graphe simple

Un graphe est dit *simple* si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.

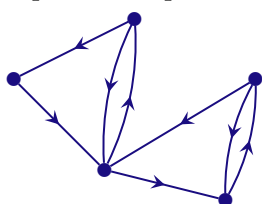
Définition 4: graphe orienté

Un graphe peut être orienté, une arête est alors appelée un *arc*. Un arc est défini par un couple (x_i, x_j) de sommets (ensemble ordonné contrairement à la paire $\{x_i, x_j\}$)

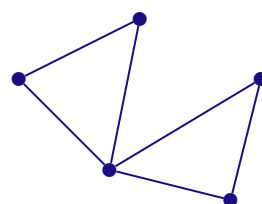
Remarque 1: À tout graphe orienté, on peut associer un graphe simple.

Par exemple sur un plan de ville où sont indiquées les rues en sens uniques, un piéton ne tiendra pas compte de l'orientation pour se déplacer.

Au graphe orienté



on associe le graphe simple

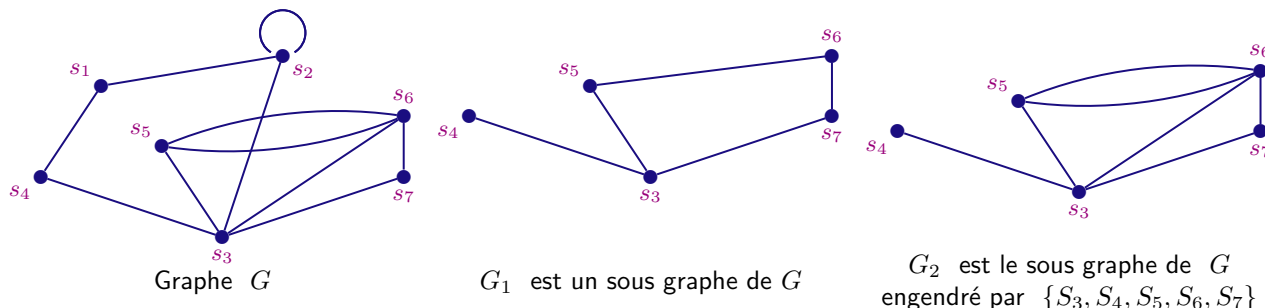


Définition 5: sous graphe

$G' = (S', A')$ est un sous-graphe de $G = (S, A)$ si S' est un sous ensemble de S et A' un sous ensemble de A tel que les extrémités des arêtes de A' sont des sommets de S' .

Si A' est constitué de toutes les arêtes de A ayant pour extrémités les sommets de S' alors on dit que $G' = (S', A')$ est le sous-graphe engendré par S' .

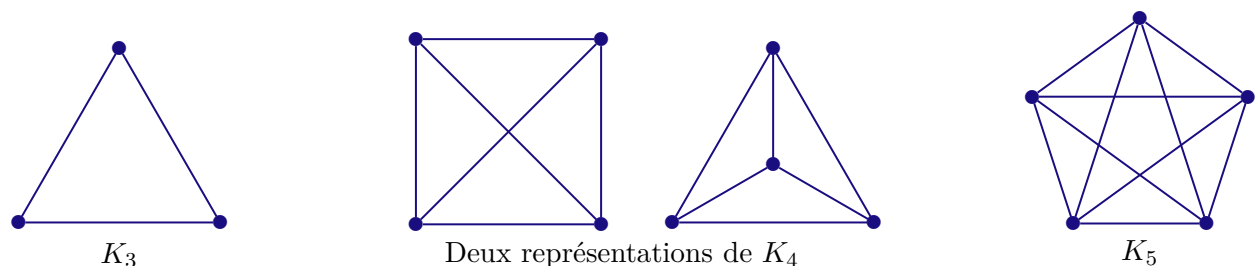
Exemple 2:



Définition 6: graphe complet

Un graphe complet K_n est un graphe simple d'ordre $n \geq 1$ dont tous les sommets sont deux à deux adjacents.

Exemple 3:



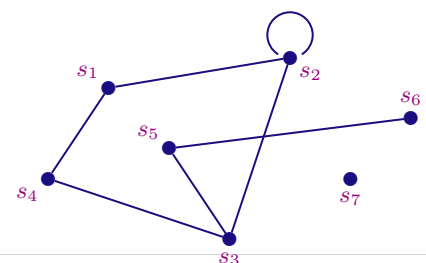
Définition 7: degré d'un sommet

On appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si le sommet est isolé.

Exemple 4:

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

Sommets	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
Degrés	2	4	2	3	2	1	0



Définition 8: degré d'un sommet dans un graphe orienté

Soit s un sommet d'un graphe orienté G .

- On note $d^+(s)$ le degré extérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité initiale.
- On note $d^-(s)$ le degré intérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité finale.

Le degré du sommet s est :

$$d(s) = d^+(s) + d^-(s)$$

Exemple 5:

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

$$d^+(s_1) = 2 \text{ et } d^-(s_1) = 1 \text{ d'où } d(s_1) = 3$$

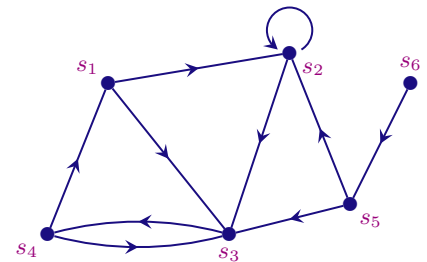
$$d^+(s_2) = 2 \text{ et } d^-(s_2) = 3 \text{ d'où } d(s_2) = 5$$

$$d^+(s_3) = 1 \text{ et } d^-(s_3) = 4 \text{ d'où } d(s_3) = 5$$

$$d^+(s_4) = 2 \text{ et } d^-(s_4) = 1 \text{ d'où } d(s_4) = 3$$

$$d^+(s_5) = 2 \text{ et } d^-(s_5) = 1 \text{ d'où } d(s_5) = 3$$

$$d^+(s_6) = 1 \text{ et } d^-(s_6) = 0 \text{ d'où } d(s_6) = 1$$



Remarque 2: Dans un graphe orienté, la somme des degrés extérieurs et la somme des degrés intérieurs sont toutes deux égales au nombre d'arcs.

Si on note a le nombre d'arcs d'un graphe orienté alors $\sum d^+(s) = \sum d^-(s) = a$.

Par exemple si dans une réunion on échange des cadeaux, le nombre de cadeaux offerts est égal au nombre de cadeaux reçus, c'est le nombre de cadeaux échangés.

Théorème 1

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe; c'est donc un nombre pair.

Preuve 1: Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

Corollaire 1

Dans un graphe, le nombre de sommets impairs est un entier pair.

Preuve 2:

Soit p la somme des degrés des sommets pairs et m la somme des degrés des sommets impairs.

$m + p$ est égal à la somme des degrés des sommets c'est donc un nombre pair donc m est un nombre pair.

On en déduit que le nombre de sommets impairs est un entier pair.

Propriété 2

Dans un graphe simple d'ordre $n > 1$, il existe deux sommets distincts s_i et s_j ayant le même degré.

Preuve 3:

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 1$. Le degré d'un sommet s quelconque du graphe G est un entier $d(s)$ tel que :

Supposons que les degrés des sommets soient différents.

2 représentation matricielle d'un graphe

Définition 9

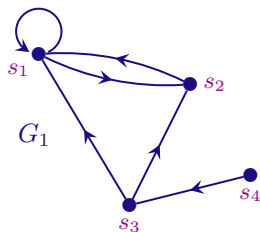
Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .

La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice carrée $M = (m_{ij})$ de dimension $n \times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets s_i et s_j .

Dans le cas d'un graphe orienté, m_{ij} est égal au nombre d'arcs ayant pour origine le sommet s_i et pour extrémité finale le sommet s_j .

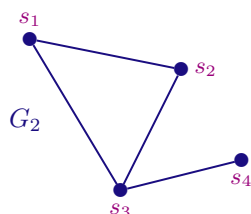
Exemple 6:

①



La matrice d'adjacence du graphe orienté G_1 est $M(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

②



La matrice d'adjacence du graphe simple G_2 est $M(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 3:

- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté
- La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple

- La demi somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté
- La somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté

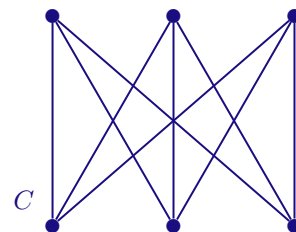
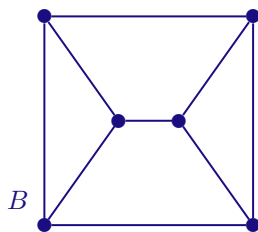
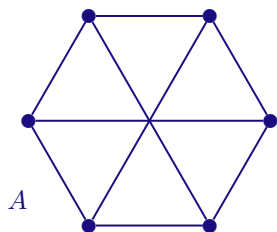
La somme des coefficients de la ligne i est égale au nombre

La somme des coefficients de la colonne i est égale au nombre de prédécesseurs

Définition 10: graphes isomorphes

Deux graphes isomorphes ont la même structure : peu importe la façon dont ils sont dessinés, il est possible de déplacer les sommets pour que l'un soit la copie conforme de l'autre, c'est-à-dire qu'ils ont la même matrice d'adjacence.

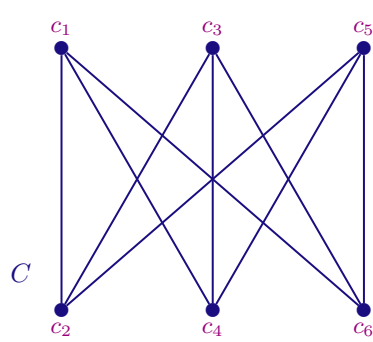
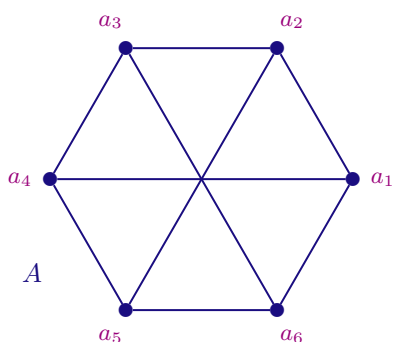
Méthode 1 (Montrer que deux graphes sont isomorphes): Considérons les trois graphes ci-dessous :



Les trois graphes ont le même ordre (6), le même nombre d'arêtes (9) et les sommets des trois graphes sont tous de degré 3.

Or dans B il y a deux sous graphes complets d'ordre 3 ce qui n'est pas le cas pour les graphes A et C . Donc B n'est pas isomorphe à A et C .

Montrons que les graphes A et C sont isomorphes.



Les sommets étant numérotés comme indiqué ci-dessus les deux graphes ont la même matrice d'adjacence :

$$M_A = M_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc A et C sont isomorphes.

Remarque 4:

- Le graphe B est *planaire* : on peut le dessiner sans que ses arêtes se croisent.
- Le graphe C (ou A) est un graphe *biparti* : il existe une partition de son ensemble S de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête du graphe a une extrémité dans X et l'autre dans Y .

Ce n'est pas un graphe planaire, il est impossible de le dessiner sans que ses arêtes se croisent.

3 chaînes, cycles ; connexité

Les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes associés à des parcours ou à des successions d'actions. Pour cela, on introduit la notion de chaîne.

Définition 11: Chaîne, cycle

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

Une chaîne dans un graphe G est une suite finie : $s_0; a_1; s_1; a_2; s_2; a_3; s_3; \dots; a_n; s_n$ débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités.

- ① La *longueur d'une chaîne* est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- ② Une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes est une *chaîne simple*.
- ③ Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une *chaîne élémentaire*.
- ④ Une *chaîne est fermée* si l'origine et l'extrémité finale de la chaîne sont confondues.
- ⑤ Un *cycle* est une chaîne simple fermée.

Quand il n'y a pas d'ambiguïté (pas d'arêtes multiples), on peut définir une chaîne par seulement la suite de ses sommets.

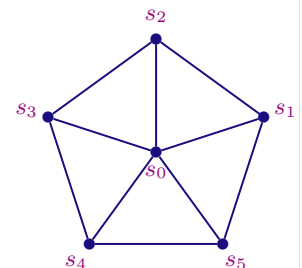
Définition 12: Chemin, circuit

Les définitions précédentes, peuvent être transposées au cas des graphes orientés. On parle alors de *chaîne orientée* ou *chemin* et de *cycle orienté* ou *circuit*.

Exemple 7:

Dans le graphe ci-contre :

- La chaîne $\{s_0; s_1; s_0; s_2; s_0; s_3; s_0; s_4; s_0; s_5; s_0\}$ est une chaîne fermée de longueur 10.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_3; s_0; s_4; s_5\}$ est une chaîne élémentaire de longueur 5.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_0; s_3; s_4; s_0; s_5; s_1\}$ est un cycle de longueur 7.



4 chaînes de longueur donnée

Théorème 3: nombre de chaînes

Soit G un graphe et M sa matrice d'adjacence.

Le nombre de chaînes de longueur k joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice M^k .

Dans la preuve, nous notons ce coefficient $m_{ij}^{(k)}$.

Ce n'est pas m_{ij}^k !!

Preuve 4 (par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$):

Initialisation : Pour $k = 1$, la proposition correspond à la définition de la matrice d'adjacence: on met un 1 s'il existe une chaîne entre x_i et x_j .

Hérédité : Soit $k \geq 2$. Supposons la proposition vraie pour $k - 1$.

Soit x_i et x_j deux sommets quelconques et considérons une chaîne quelconque de longueur k entre eux. On peut la décomposer en une arête entre x_i et un voisin, disons x_p et une chaîne de longueur $k - 1$ entre x_p et x_j .

On peut donc appliquer la relation de récurrence à cette dernière chaîne (puisque'elle est de longueur $k - 1$): le nombre de chaînes entre x_p et x_j est donc égal au coefficient $m_{pj}^{(k-1)}$.

Il se peut qu'il y ait des arêtes multiples entre x_i et x_p donc le nombre de chaînes de longueur k passant par x_p est $m_{ip} \times m_{pj}^{(k-1)}$.

Cette relation fonctionne aussi si x_p n'est pas un voisin de x_i car alors m_{ip} est nul.

Finalement, pour avoir toutes les chaînes de longueur k , on calcule:

$$\sum_{p=1}^n m_{ip} m_{pj}^{(k-1)}$$

Par définition du produit matriciel, ce terme est le coefficient à la position i, j de $M \times M^{k-1} = M^k$, ce qui démontre l'hérédité.

Définition 13: distance

Soit G un graphe; si x et y sont deux sommets de G , la distance de x à y notée $d(x, y)$, est la longueur d'une plus courte chaîne de G reliant x à y .

Remarque 5:

- La distance d'un sommet à lui même est nulle.
- S'il n'existe pas de chaînes joignant deux sommets x et y , la distance de x à y est infinie.
- Un problème important à résoudre est de trouver la plus courte chaîne entre deux sommets d'un graphe. Le théorème suivant nous y aidera.

Théorème 4

Soit x_i et x_j deux sommets d'un graphe G de matrice d'adjacence M . Alors:

$$d(x_i, x_j) = \min \{k \geq 1 \mid m_{ij}^{(k)} \neq 0\}$$

Exemple 8: Considérons un graphe dont la matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et cherchons la distance entre les sommets x_1 et x_4 .

La calculatrice ou ici le logiciel de calcul formel Sage donne :

```
sage: M=matrix([[0,1,0,0,0,1],
                [1,0,1,0,1,1],
                [0,1,0,1,1,0],
                [0,0,1,0,1,0],
                [0,1,1,1,0,1],
                [1,1,0,0,1,0]])
```

```
sage: M^2
[2 1 1 0 2 1]
[1 4 1 2 2 2]
[1 1 3 1 2 2]
[0 2 1 2 1 1]
[2 2 2 1 4 1]
[1 2 2 1 1 3]
```

```
sage: M^3
[2 6 3 3 3 5]
[6 6 8 3 9 7]
[3 8 4 5 7 4]
[3 3 5 2 6 3]
[3 9 7 6 6 8]
[5 7 4 3 8 4]
```

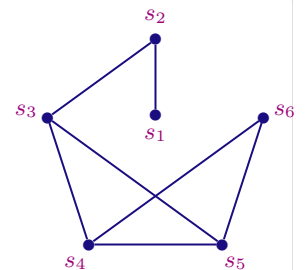
Le plus petit $m_{14}^{(k)}$ non nul est obtenu pour $k = 3$ et il y a trois chaînes de longueur minimale 3 entre les sommets x_1 et x_4 .

Définition 14: diamètre

On appelle diamètre d'un graphe la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

Exemple 9:

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe G



Déterminons la matrice des distances D du graphe, dont le coefficient $d_{i,j}$ est égal à la distance entre les sommets i et j .

La distance d'un sommet à lui même est nulle et, on utilise le symbole ∞ pour indiquer que la distance entre deux sommets n'est pas encore fixée.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 1 : $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 2 : $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & \infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \infty & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 3 : $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 4 : $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La plus grande des distances entre deux sommets du graphe est 4 donc le diamètre du graphe est 4.

Définition 15: connexité

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques G .

Autrement dit : Un graphe est connexe si tout sommet est atteignable à partir de n'importe quel sommet.

Méthode 2 (algorithme pour déterminer les sommets atteignables):

Marquer provisoirement (*au crayon*) le sommet x ;

Tant que des sommets sont provisoirement marqués

choisir un sommet y provisoirement marqué;

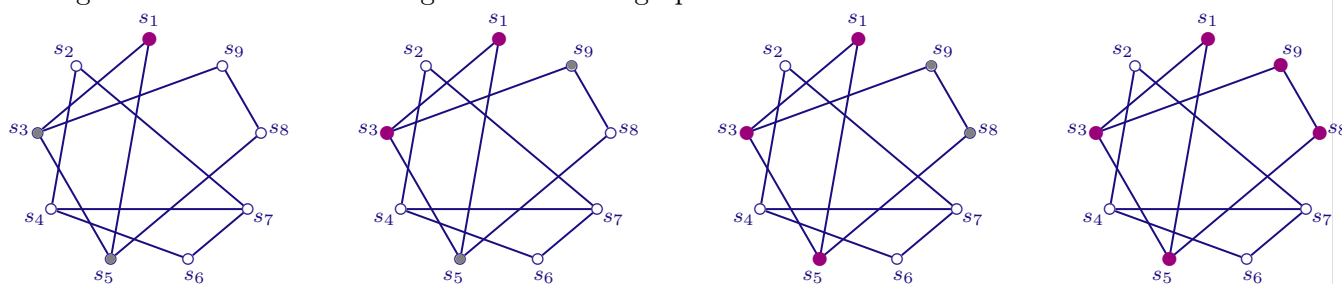
marquer provisoirement les sommets adjacents non marqués;

marquer définitivement (*à l'encre*) y ;

Fin Tant que

Si tous les sommets sont définitivement marqués alors le graphe est connexe, sinon on a obtenu la classe de connexité du sommet x .

La figure suivante illustre cet algorithme sur un graphe



Le graphe n'est pas connexe, il n'existe pas de chaîne entre les sommets s_1 et s_2 .

5 cycle eulérien

Définition 16: cycle eulérien

Un cycle eulérien (*respectivement une chaîne eulérienne*) dans un graphe G est un cycle (*respectivement une chaîne*) contenant chaque arête de G une et une seule fois.

Théorème 5

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets ont un degré pair.

Preuve 5: Si le graphe possède 1 seul sommet, d'une part le graphe est connexe et possède un cycle eulérien (en passant une et une seule fois par chacune des boucles); et d'autre part, l'unique sommet est pair car est d'ordre deux fois le nombre de boucles. On suppose donc que l'ordre du graphe est supérieur ou égal à 2.

Sens direct :

Si le graphe connexe admet un cycle eulérien alors en chaque sommet, pour chaque arête entrante, il doit exister une autre arête sortante, si bien que chaque sommet est de degré pair.

Réciproque admise

Théorème 6

Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2, alors les deux sommets de degré impair sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

Preuve 6: Soit G un graphe connexe. Si le nombre de sommets de degré impair est nul, alors le graphe G admet un cycle eulérien.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2. Soit s_i et s_j les deux sommets de degré impair. Le graphe G' obtenu en ajoutant l'arête $s_i s_j$ au graphe G est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. G' admet un cycle eulérien dont l'origine est le sommet s_i .

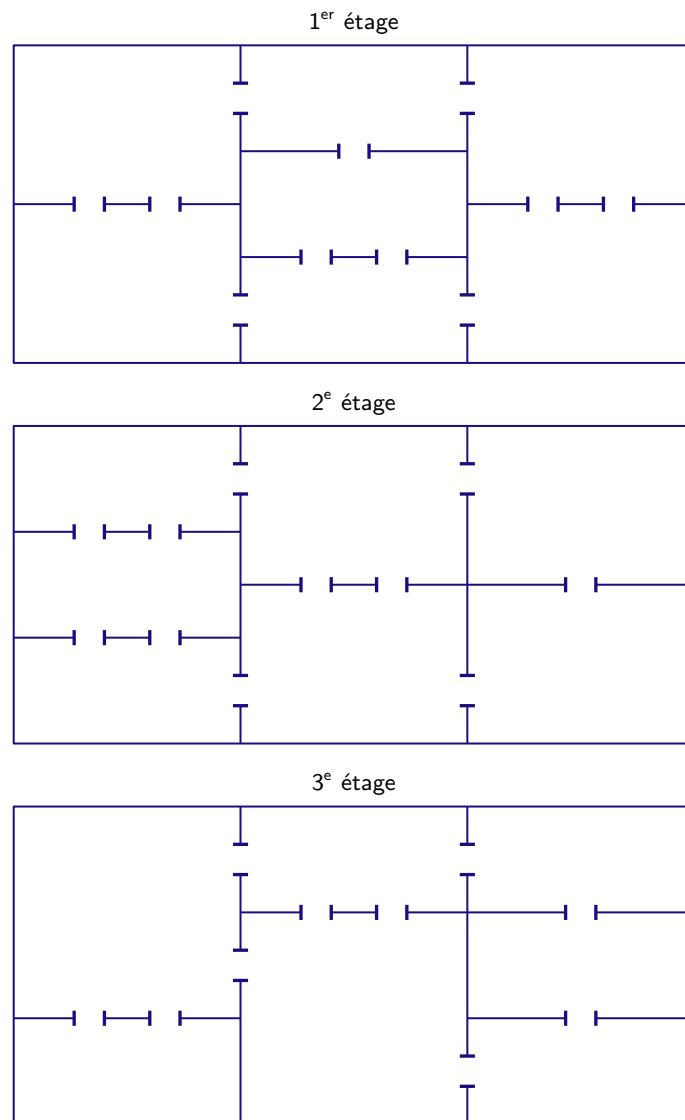
Par conséquent G contient une chaîne eulérienne qui commence en s_i et se termine en s_j .

Exemple 10: Voici le plan de trois étages d'un musée. À chaque étage, un visiteur se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.

Pour chacun des étages :

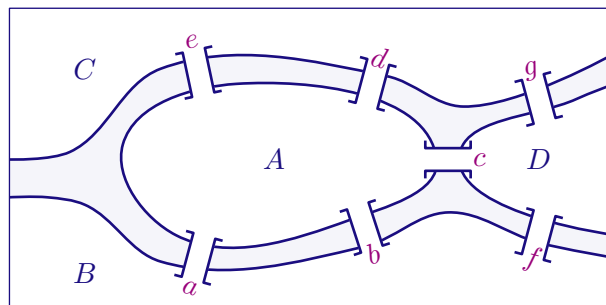
Est-il possible de faire le tour de l'étage en passant exactement une seule fois par chacune des portes ?

Dans ce cas, où faut-il placer les portes d'entrée et de sortie de l'étage pour que ce parcours reste possible ?



Exemple 11:

Voici un plan de la ville de Königsberg :



Est-il possible de se promener en ne passant qu'une seule fois sur chacun des sept ponts ?